Министерство образования, науки и молодежной политики Краснодарского края

ГБПОУ КК «Вознесенский техникум пищевых производств»

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 1 КУРСА РАЗДЕЛ 11 КОМБИНАТОРИКА

Автор:

Пшеничная Наталья Сергеевна

преподаватель математики

Ст. Вознесенская

2020

СОДЕРЖАНИЕ

АННОТАЦИЯ

Учебное пособие по общеобразовательной учебной дисциплине Математика предназначено для изучения математики в рамках образовательной программы среднего общего образования в пределах освоения основной профессиональной образовательной программы СПО по программе подготовки специалистов среднего звена (ОПОП СПО) на базе основного общего образования.

Общие цели изучения математики реализуются в четырех направлениях:

- общее представление об идеях и методах математики;
- интеллектуальное развитие;
- овладение необходимыми конкретными знаниями и умениями;
- воспитательное воздействие.

Освоение содержания данного раздела дисциплины «Математика» обеспечивает достижение студентами следующих результатов:

• ***метапредметных***:

− владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

− готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;

• ***предметных***:

сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;

− владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

− владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.

РАЗДЕЛ 11 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Комбинаторика — раздел математики о вычислении количества различных комбинаций каких-либо элементов.

В заданиях по комбинаторике обычно нужно выяснить, возможно ли составить комбинацию определённого вида, и сколько различных комбинаций можно составить.

Один из способов решения задач комбинаторики — это рассмотреть все возможные комбинации элементов, что называется полным перебором вариантов.

Часто в комбинаторике нужно вычислить произведения натуральных чисел по порядку, начиная с 1.. Чтобы можно было короче записать выражения такого вида, в математике используется знак «!».

Определение: Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называется факториалом числа n и записывается n! (читается как «эн факториал»).

$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n$**.**

Принято, что $0!=1$. $1!=1$;

Пример: вычисли значение выражения.

$5!+4!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1+4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120+24=144$.

Основные законы комбинаторики

- Закон сложения

Допустим, что есть две группы: в одной k различных элементов, во второй n различных элементов. Если из первой группы какой-либо элемент можно выбрать k способами, а из второй — n способами, то выбрать один элемент из первой или второй группы можно k+n способами.

Это называется **законом сложения** в комбинаторике. Закон сложения также используется, если нужно выбрать элемент из трёх, четырёх и т. д. групп.

Закон сложения используется тогда, когда нужно выбрать только 1 элемент.

Чтобы использовать закон сложения:

1. нужно понять, каковы группы, из которых нужно выбрать 1 элемент;

2. нужно выяснить количество элементов в каждой группе;

3. нужно убедиться, что в различных группах, из которых выбирают элемент, нет одинаковых элементов.

Пример:

Вика должна выбрать только один десерт из 8 *видов коктейля,* 5 *видов мороженого и* 5 *видов йогурта. Сколькими способами она может выбрать десерт?*

Решение: используется закон сложения, т. к. Вика должна выбрать или коктейль, или мороженое, или йогурт. 8+5+5=18.

Ответ: Вика может выбрать десерт 18 *способами.*

При использовании закона сложения надо следить, чтобы ни один из способов выбора объекта a не совпадал с каким-либо способом выбора объекта b. Если такие совпадения есть, то закон сложения утрачивает силу, и мы получаем лишь (k+n−m) способов выбора, где m — число совпадений.

Итак:

если объект a можно получить k способами, объект b — n способами, то объект «a или b» можно получить k+n−m способами, где m — это количество повторяющихся способов.

Пример: в группе 7 *человек имеют «*5*» по математике,* 9 *человек — «*5*» по философии. В сессии* 2 *экзамена. Известно, что* 4 *человека сдали сессию отлично. Сколько человек имеет хотя бы одну пятерку в сессии?* *Решение:* 7+9−4=12.

- Закон умножения.

Если элемент A можно выбрать k способами и затем второй элемент B можно выбрать m различными способами, то пару элементов A и B можно выбрать k·m способами.

Закон выполняется так же, если нужно выбирать по 1 элементу из трёх, четырёх и т. д. групп.

Пример: Юра хочет подобрать одежду для классного вечера. Сколько различных комплектов одежды может получиться у Юры, если у него есть майки 2-х цветов, но у каждого цвета есть 3 различных вида (одноцветная майка, в полоску и в клеточку), а также белые и чёрные шорты?

Решение: Чтобы получился комплект, нужно выбрать цвет, вид майки и шорты.

По закону умножения Юра может одеться 2·3·2 =12 различными способами.

Основные понятия комбинаторики

Если из некоторого количества элементов, различных меду собой, составлять различные комбинации, то среди них можно выделить три типа комбинаций, носящих общее название – **соединения**.

Рассмотрим подробнее эти три типа соединений:

1) **Перестановки.**

Определение. Если в некотором множестве $a_1, a_2, ..., a_m$ переставлять местами элементы, оставляя неизменным их количество, то каждая полученная таким образом комбинация называется **перестановкой**.

Общее число перестановок из m элементов обозначается P_m и вычисляется по формуле: $P_m = m!$

Пример: сколькими различными способами можно составить список учеников из 6 *человек?*

Решение Р6=6!=6·5·4·3·2·1=720.

Ответ: список учеников можно составить 720 *различными способами.*

2) **Размещения.**

Определение. Если составлять из m различных элементов группы по n элементов в каждой, располагая взятые элементы в различном порядке. Получившиеся при этом комбинации называются **размещениями** из m элементов по n.

Общее число таких размещений рассчитывается по формуле:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)...(m-(n-1)) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Вообще говоря, перестановки являются частным случаем размещений.

***Пример**: У стола осталось 6 свободных мест. Сколькими различными способами можно разместить за этим столом 4 человека?*

Решение:

основное множество составляют 6 свободных мест, значит, $m=6$, выборку составляют 4 человека, значит, $n=4$. Так как важен порядок, в котором люди займут места, количество выборок равно количеству размещений из 6 элементов по 4 элемента, т. е. $A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 3*4*5*6 = 360$

***Ответ:** за столом с шестью свободными местами четырех человек можно разместить 360 различными способами.*

3) **Сочетания.**

Определение. Если из m элементов составлять группы по n элементов в каждой, не обращая внимания на порядок элементов в группе, то получившиеся при этом комбинации называются **сочетаниями** из m элементов по n.

Общее число сочетаний находится по формуле:

$$C_m^n = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Пример. *Сколькими способами из 12 учеников можно выбрать 3-х учеников для дежурства?*

Решение: *так как порядок выбора учеников неважен, нужно вычислить сочетания по 3 элемента из 12 элементов, т. е.* m*=12 и* n*=3.*

$$C_{12}^{3} = \frac{12!}{3!\,(12-3)!} = \frac{12!}{3! * 9!} = \frac{10 * 11 * 12}{1 * 2 * 3} = 220$$

Ответ: *трёх учеников из 12 можно выбрать 220 различными способами.*

4)Также одним из вариантов комбинаций являются **перестановки с повторяющимися элементами**.

Если среди m элементов имеется m_1 одинаковых элементов одного типа, m_2 одинаковых элементов другого типа и т.д., то при перестановке этих элементов всевозможными способами получаем комбинации, количество которых определяется по формуле:

$$\boxed{\frac{P_m}{P_{m_1} P_{m_2} \ldots P_{m_k}} = \frac{m!}{m_1!\, m_2! \ldots m_k!}}$$

Пример. Номер автомобиля состоит из трех букв и трех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 10 цифр и алфавит в 30 букв. Очевидно, что количество всех возможных комбинаций из 10 цифр по 4 равно 10.000.

Число всех возможных комбинаций из 30 букв по две равно $A_{30}^{2} = 30 \cdot 29 = 870$.

Если учесть возможность того, что буквы могут повторяться, то число повторяющихся комбинаций равно 30 (одна возможность повтора для каждой буквы). Итого, полное количество комбинаций по две буквы равно 900.

Если к номеру добавляется еще одна буква из алфавита в 30 букв, то количество комбинаций увеличивается в 30 раз, т.е. достигает 27.000 комбинаций.

Окончательно, т.к. каждой буквенной комбинации можно поставить в соответствие числовую комбинацию, то полное количество автомобильных номеров равно 270.000.000.

Бином Ньютона. (полиномиальная формула)

В дальнейшем будет получена формула бинома Ньютона с помощью приемов дифференциального исчисления.

Бином Ньютона – это формула, выражающая выражение $(a + b)^n$ в виде многочлена. Эта формула имеет вид:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$$

C_n^k - число сочетаний из n элементов по k.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Широко известные формулы сокращенного умножения квадрата суммы и разности, куба суммы и разности, являются частными случаями бинома Ньютона.

Когда степень бинома невысока, коэффициенты многочлена могут быть найдены не расчетом по формуле количества сочетаний, а с помощью так называемого треугольника Паскаля. (Блез Паскаль (1623 – 1662) – французский математик).

Этот треугольник имеет вид:

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
…………………

Формула бинома Ньютона может быть обобщена для произвольного числа слагаемых.

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k}$$

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

Напомним, что при вычислениях 0! принимается равным 1.

РАЗДЕЛ 11 Практическая работа 46

Тема: Задачи на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний

Цель: систематизация знаний раздела на конкретных примерах

№1 Найти значение:

1) Р 5; 2) Р 1; 3) Р9; 4) Р7.

№2 Дана корзина с конфетами разных видов. Из всех конфет 3 конфеты «Буревестник», 2 конфеты «Клубничные» и 13 конфет «Белочка».Определи, сколькими способами можно выбрать 3 конфеты так, чтобы это были 1 «Буревестник», 1 «Клубничная» и 1 «Белочка»?

№ 3 Сколькими способами могут занять места 5 учащихся класса за 10 одноместными партами?

№ 4 В классе 10 человек имеют «5» по математике, 9 человек — «5» по истории, 4 человека имеют «5» и по математике, и по истории. Сколько человек имеют пятёрку по математике или по истории?

№ 5 Сколько различных пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2,3, 4, 5 так, чтобы:

1) последней была цифра 3;

2) первой была цифра 4;

3) первой была цифра 5, а второй — цифра 1;

№ 6 Сколько различных слов можно составить, переставляя местами буквы в слове: 1) гипотенуза; 2) треугольник?

№ 7 Из опрошенных 30 молодых людей работают 20, учатся 23 и ничего не делают 5. Найди:

сколько молодых людей учится и работает?

Сколько молодых людей только учится?

Сколько молодых людей только работает?

№ 8 Сколькими различными способами можно выбрать капитана и его помощника из 13 участников команды?

№ 9 Сколькими различными способами Валерий может выбрать три конфеты и два мандарина, если на тарелке 21 конфета и 5 мандаринов?

РАЗДЕЛ 11 Практическая работа 48. Треугольник Паскаля

Цель: изучить правила разложения многочленов по формуле бинома Ньютона

В теории многочленов часто двучлены называют биномами. Можно доказать справедливость следующей форму лы, называемой биномиальной формулой Ньютона:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

Биномиальные коэффициенты легко находить с помощью так называемого треугольника Паскаля — таблицы значений С ", составленной на основании рекуррентного свойства числа сочетаний .

При записи разложения степени бинома полезно контролировать следующие моменты:

1) число членов получаемого многочлена на единицу больше показателя т степени бинома, т. е. равно m + 1;

2) показатели степени первого слагаемого бинома последовательно убывают на единицу от m до 0, а показатели второго последовательно возрастают на единицу от 0 до n ;

3) биномиальные коэффициенты, равноудалённые от начала и конца разложения по формуле (1), равны между собой.

Практическая часть:

1. С помощью свойств элементов строки Паскаля найти сумму:

$C_6^6 + C_6^5 + C_6^4 + C_6^3 + C_6^2 + C_6^0$;

$C_7^6 + C_7^5 + C_7^4 + C_7^3 + C_7^2 + C_7^1$.

$C_4^1 + C_5^2 + C_4^4 + C_7^3 + C_9^2 + C_{10}^1$

2 Записать разложение бинома:

$(1+x)^8;\ (x+2)^6;\ (3x+2)^4.$

РАЗДЕЛ 11 Практическая работа 49. Тема: Решение прикладных задач

Цель: научиться решать прикладные задачи с использованием формул комбинаторики

№ 1 Сколькими способами можно составить график очерёдности дежурства (по одному человеку в день) в школьной столовой среди: 1) восьми учащихся на восемь дней; 2) семи учащихся на семь дней?

№ 2 Сколько существует способов выбора троих учёных из числа: 1) десяти; 2) девяти сотрудников кафедры?

№ 3 Сколькими способами могут распределиться одно первое, одно второе и одно третье места среди: 1) десяти; 2) восьми участников соревнования?

№ 4 Сколькими способами можно рассадить: 1) четверых; 2) троих учащихся на имеющихся в классе 20 стульях?

№ 5 Сколькими способами можно назначить патруль из двух солдат и одного офицера, если в роте: 1) 75 солдат и 6 офицеров; 2) 78 солдат и 5 офицеров?

№6 Сколько диагоналей имеет выпуклый: шестиугольник; восьмиугольник ?

№ 7 Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать: 1) две карты чёрной масти; 2) две карты червовой масти?

№ 8 Шифр в камере хранения состоит из двух букв, выбираемых из 10 гласных русского алфавита, и четырёхзначного числового кода (буквы и цифры в шифре могут повторяться; числовой код 0000 также возможен). Сколько различных шифров можно использовать в этой камере хранения?

№9 В некотором государстве автомобильный номер составляется из трёх различных букв алфавита, состоящего из 25 букв, и трёх цифр (с их возможными повторами). Скольким автомобилям можно присвоить получаемые таким образом номера?

№ 10 В классе изучают 8 предметов естественно-математического цикла. Сколькими способами можно составить расписание на пятницу, если в этот день должны быть:

1) 5 уроков из пяти разных предметов этого цикла;

2) 6 уроков из шести разных предметов этого цикла.

№ 11 Сколько существует способов для обозначения с помощью букв A , B, C, D, E , F вершин данного: 1) четырёхугольника; 2) треугольника?

№ 12 В помещении 16 ламп. Сколько существует вариантов его освещения, если одновременно должны светиться:1) 15 ламп; 2) 14 ламп?

№ 13 На плоскости отмечено 16 точек причём никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Сколько различных отрезков можно построить, соединяя эти точки попарно?

ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Башмаков М.И. Математика. - М.: Академия, 2019.ФИРО

2. Материалы сайта Якласс www.yaklass.ru

3.Алгебра и начала математического анализа / Ш.А.Алимов. - М.: Просвещение, 2012.